Άσκηση Να λυθεί το σύστημα : $\begin{cases} x \equiv 2 \bmod 5 \\ x \equiv 3 \bmod 7 \\ x \equiv 1 \bmod 6 \end{cases}$ 10/12/2018

Είναι $\mu\kappa\delta(5,7) = \mu\kappa\delta(6,7) = \mu\kappa\delta(6,5) = 1$

$M = 5 \cdot 6 \cdot 7$

$b_1 M_1 \equiv 1 \bmod m_1$	$b_2 M_2 \equiv 1 \bmod m_2$	$b_3 M_3 \equiv 1 \bmod m_3$
$b_1 7 \cdot 6 \equiv 1 \bmod 5$	$b_2 \cdot 5 \cdot 6 \equiv 1 \bmod 7$	$b_3 \cdot 5 \cdot 7 \equiv 1 \bmod 6$
$42 b_1 \equiv 1 \bmod 5$	$b_2(-2)(-1) \equiv 1 \bmod 7$	$b_3(-1)(1) \equiv 1 \bmod 6$
$2 b_1 \equiv 1 \bmod 5$	$2 b_2 \equiv 1 \bmod 7$	$b_3 \equiv -1 \bmod 6$
$b_1 \equiv 3 \bmod 5$	$b_2 \equiv 4 \bmod 7$	

a_i	M_i	b_i
2	$7 \cdot 6$	3
3	$5 \cdot 6$	4
1	$5 \cdot 7$	-1

$x \equiv a_1 M_1 b_1 + a_2 b_2 M_2 + a_3 b_3 M_3 \bmod M$

$x \equiv 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3 + 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4 + 1 \cdot 5 \cdot 7(-1) \bmod 5 \cdot 6 \cdot 7$

$x \equiv 6 \cdot 7 \cdot 6 + 12 \cdot 5 6 - 5 \cdot 7 \bmod 210$

$x \equiv (5+1) \cdot 7 \cdot 6 + (14-2) \cdot 5 \cdot 6 - 35 \bmod 210$

$x \equiv \cancel{5 \cdot 7 \cdot 6} + 7 \cdot 6 + \cancel{14 \cdot 5 \cdot 6} - 2 \cdot 5 \cdot 6 - 35 \bmod 210$

$x \equiv 42 - 60 - 35 \bmod 210$

$x \equiv 42 - 95 \bmod 210$

$x \equiv 252 - 95 \bmod 210$

$x \equiv 157 \bmod 210$, $x = 157 + \lambda 210$, $\lambda \in \mathbb{Z}$

Άσκηση Βρείτε τον μικρότερο φυσικό αριθμό μεγαλύτερο από το 2000 που είναι λύση του συστήματος : $\begin{cases} x \equiv 2 \bmod 5 \\ x \equiv 3 \bmod 7 \\ x \equiv 1 \bmod 6 \end{cases}$

Λύσεις (Σ): $x = 157 + \lambda 210$

$x = 157 + \lambda 210 > 2000 \Rightarrow \lambda \cdot 210 > 1843 \Rightarrow \lambda > \frac{1843}{210} \simeq 8,\ldots$

Άρα $\lambda = 9$

$x = 157 + 9 \cdot 210 \Rightarrow x = 2047$

Άσκηση Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} 3x \equiv 1 \bmod 11 \\ 5x \equiv 15 \bmod 25 \\ 20x \equiv 5 \bmod 15 \end{cases}$

Φαίνεται ότι δε μπορώ να εφαρμόσω το κινέζικο θεώρημα γιατί οι ισοτιμίες δεν είναι στη μορφή $x \equiv a_i \bmod m_i$ και οι μκδ δεν είναι όλοι ίσοι με 1.

$3x \equiv 1 \bmod 11$, μκδ$(3,11)=1$, $x \equiv 4 \bmod 11$

$5x \equiv 15 \bmod 25$, μκδ$(5,25)=5 | 15$, $x \equiv 3 \bmod 5$, μία η λύση μόδιο 5 και πέντε οι λύσεις μόδιο 25: $\begin{cases} x \equiv 3 \bmod 25 \\ x \equiv 3+5 \bmod 25 \\ x \equiv 3+10 \bmod 25 \\ x \equiv 3+15 \bmod 25 \\ x \equiv 3+20 \bmod 25 \end{cases}$

$20x \equiv 5 \bmod 15$, μκδ$(20,15)=5|5$

$4x \equiv 1 \bmod 3$

μία λύση μόδιο 3, $x \equiv 1 \bmod 3$

πέντε λύσεις μόδιο 15, $\begin{cases} x \equiv 1 \bmod 15 \\ x \equiv 1+3 \bmod 15 \\ x \equiv 1+6 \bmod 15 \\ x \equiv 1+9 \bmod 15 \\ x \equiv 1+12 \bmod 15 \end{cases}$

Καταλήγω στο πιο απλό από τα συστήματα:

$\begin{cases} x \equiv 4 \bmod 11 \\ x \equiv 3 \bmod 5 \\ x \equiv 1 \bmod 3 \end{cases}$ μκδ$(11,5)=$μκδ$(5,3)=$μκδ$(11,3)=1$
Άρα τώρα μπορεί να εφαρμοσθεί το κινέζικο θεώρημα.

$M = 11 \cdot 5 \cdot 3$

$b_1 M_1 \equiv 1 \bmod m_1$	$b_2 M_2 \equiv 1 \bmod m_2$	$b_3 M_3 \equiv 1 \bmod m_3$
$b_1 5 \cdot 3 \equiv 1 \bmod 11$	$b_2 3 \cdot 11 \equiv 1 \bmod 5$	$b_3 5 \cdot 11 \equiv 1 \bmod 3$
$15 b_1 \equiv 1 \bmod 11$	$3 \cdot 1 b_2 \equiv 1 \bmod 5$	$b_3(-1)(-1) \equiv 1 \bmod 3$
$4 b_1 \equiv 1 \bmod 11$	$3 b_2 \equiv 1 \bmod 5$	$b_3 \equiv 1 \bmod 3$
$b_1 \equiv 3 \bmod 11$	$b_2 \equiv 2 \bmod 5$	

a_i	M_i	b_i
4	$5\cdot3$	3
3	$3\cdot11$	2
1	$5\cdot11$	1

$x \equiv 4\cdot5\cdot3\cdot3 + 3\cdot3\cdot11\cdot2 + 1\cdot5\cdot11\cdot1 \mod 11\cdot5\cdot3$

$x \equiv 12\cdot5\cdot3 + 6\cdot11\cdot3 + 55 \mod 3\cdot5\cdot11$

$x \equiv (11+1)\cdot5\cdot3 + (5+1)\cdot11\cdot3 + 55 \mod 3\cdot5\cdot11$

$x \equiv \cancel{11\cdot5\cdot3} + 5\cdot3 + \cancel{5\cdot3}\cdot11 + 3\cdot11 + 55 \mod 3\cdot5\cdot11$

$x \equiv 15 + 33 + 55 \mod 15\cdot11$

$x \equiv 103 \mod 165$

$x = 103 + \lambda\cdot165$, $\lambda\in\mathbb{Z}$, οι άπειρες λύσεις του συστήματος.

Φυλλάδιο 8

Άσκηση 4 Βρείτε ένα φυσικό αριθμό ο οποίος είναι πολλαπλάσιο του 11 και δίνει υπόλοιπο 1 όταν διαιρείται με τους 2,3,5,7.

Λύση x ο φυσικός αριθμός που ψάχνουμε

$x \equiv 0 \mod 11$

$x \equiv 1 \mod 2$

$x \equiv 1 \mod 3$

$x \equiv 1 \mod 5$

$x \equiv 1 \mod 7$

$(11,2) = (4,3) = (11,5) = (11,7) = (2,3) = (2,5) = (3,7) = (3,5) = (3,7) = (5,7) = 1$

Μπορώ να εφαρμόσω το κινέζικο θεώρημα.

$M = 11\cdot2\cdot3\cdot5\cdot7$

$b_2M_2 \equiv 1 \mod m_2$

$b_2\cdot11\cdot3\cdot5\cdot7 \equiv 1 \mod 2$

$b_2 \equiv 1 \mod 2$

$b_3M_3 \equiv 1 \mod m_3$

$b_3\cdot11\cdot2\cdot5\cdot7 \equiv 1 \mod 3$

$b_3(-1)(-1)(-1)(1) \equiv 1 \mod 3$

$b_3 \equiv -1 \mod 3$

$b_4M_4 \equiv 1 \mod m_4$

$b_4\,11\cdot2\cdot3\cdot7 \equiv 1 \mod 5$

$b_4\cdot1\cdot1\cdot2 \equiv 1 \mod 5$

$2b_4 \equiv 1 \mod 5$

$b_4 \equiv 3 \mod 5$

$b_5M_5 \equiv 1 \mod m_5$

$b_5\cdot11\cdot2\cdot3\cdot5 \equiv 1 \mod 7$

$b_5\cdot1\cdot2 \equiv 1 \mod 7$

$b_5 \equiv 1 \mod 7$

a_i	M_i	b_i
0	$2\cdot3\cdot5\cdot7$	b_1
1	$11\cdot3\cdot5\cdot7$	1
1	$11\cdot2\cdot5\cdot7$	-1
1	$11\cdot2\cdot3\cdot7$	3
1	$11\cdot2\cdot3\cdot5$	1

$x \equiv \cancel{0M_1b_1} + 1\cdot11\cdot3\cdot5\cdot7\cdot1 + 1\cdot11\cdot2\cdot5\cdot7(-1) + 1\cdot11\cdot2\cdot2\cdot7\cdot3 +$
$+ 1\cdot11\cdot2\cdot3\cdot5\cdot1 \mod 11\cdot2\cdot3\cdot5\cdot7$

(η) ένας άλλος τρόπος

$$\begin{cases} x \equiv 0 \bmod 11 \\ x \equiv 1 \bmod 2\cdot3\cdot5\cdot7 \end{cases}$$

$x \equiv 1 \bmod 2$
$x \equiv 1 \bmod 3$
$x \equiv 1 \bmod 5$
$x \equiv 1 \bmod 7$

Οι αριθμοί 2,3,5,7 είναι πρώτοι ανά δύο μεταξύ τους άρα το σύστημα των τεσσάρων αυτών ισοτιμιών έχει μοναδική λύση, την $x \equiv 1 \bmod 2\cdot3\cdot5\cdot7$. Με αυτή την ισοτιμία και την $x \equiv 0 \bmod 11$ δημιουργώ νέο σύστημα πιο απλό ισοδύναμο με το αρχικό.

Παράδειγμα Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x \equiv 12 \bmod 22 \\ x \equiv 4 \bmod 6 \\ x \equiv 1 \bmod 33 \end{cases}$

Δεν μπορώ να εφαρμόσω το κινέζικο θεώρημα

$x \equiv 12 \bmod 22 \rightarrow x = 12 + 22y$

$x \equiv 4 \bmod 6 \rightarrow \underbrace{12 + 22y \equiv 4 \bmod 6}$

Αν αυτή έχει λύση, τότε και το αρχικό σύστημα έχει λύση.

$12 + 22y \equiv 4 \bmod 6$

$4y \equiv 4 \bmod 6$ μκδ$(4,6) = 2/4$

$\Rightarrow 2y \equiv 2 \bmod 3$

$y \equiv 1 \bmod 3 \Rightarrow y = 1 + 3z$

$x = 12 + 22y \Rightarrow x = 12 + 22(1+3z) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 12 + 22 + 66z$ Ως τώρα έχω βρει την κοινή λύση της $1^{ης}$ και $2^{ης}$ ισοτιμίας

Πάω στην $3^{η}$ ισοτιμία: $x \equiv 1 \bmod 33$

$34 + 66z \equiv 1 \bmod 33$

$1 + 0z \equiv 1 \bmod 33$

$0z \equiv 0 \bmod 33$, ταυτότητα

Άρα το z μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή

Άρα $x = 34 + 66z$

$x \equiv 34 \bmod 66$

Παράδειγμα Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x \equiv 3 \bmod 5 \\ x \equiv 7 \bmod 9 \\ x \equiv 4 \bmod 6 \end{cases}$

$x \equiv 3 \bmod 5 \rightarrow x = 3 + 5y$

$\left.\begin{matrix} x \equiv 7 \bmod 9 \\ x \equiv 4 \bmod 6 \end{matrix}\right\}$ μκδ$(9,6) \neq 1$, δεν μπορώ να εφαρμόσω το κινέζικο θεώρημα

$3 + 5y \equiv 7 \bmod 9$

$5y \equiv 4 \bmod 9$

$5y \equiv -5 \bmod 9$

$y \equiv -1 \bmod 9 \Rightarrow y = -1 + 9z$

$x = 3 + 5y \Rightarrow x = 3 + 5(-1 + 9z) \Rightarrow x = 3 - 5 + 45z \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -2 + 45z$

$x \equiv 4 \bmod 6$

$-2 + 45z \equiv 4 \bmod 6$

$45z \equiv 6 \bmod 6$

$3z \equiv 0 \bmod 6$, μκδ$(3,6) = 3 | 0$

Έχει τρεις λύσεις μόδιο 6 και μια λύση μόδιο 2.

$z \equiv 0 \bmod 2 \rightarrow z = 0 + 2k$

Άρα $x = -2 + 45(2k) \Rightarrow x = -2 + 90k$

Άρα $x = -2 + 90k$

$x \equiv -2 \bmod 90$

Παράδειγμα Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x \equiv 5 \bmod 6 \\ x \equiv 8 \bmod 10 \\ x \equiv 11 \bmod 17 \end{cases}$

$\mu\kappa\delta(6,10) = 2$.
Άρα δεν μπορώ να εφαρμόσω το κινέζικο θεώρημα
$x = 5 + 6y$
$x \equiv 8 \bmod 10 \Rightarrow 5 + 6y \equiv 8 \bmod 10$
$\Rightarrow 6y \equiv 3 \bmod 10$
$\mu\kappa\delta(6,10) = 2 \nmid 3$. Άρα το σύστημα δεν έχει λύση.

η

$\begin{cases} x \equiv 5 \bmod 6 \\ x \equiv 8 \bmod 10 \\ x \equiv 11 \bmod 17 \end{cases}$ Εφαρμόζω το κινέζικο θεώρημα ανάποδα. Αντικαθιστώ δηλαδή μια λύση με σύστημα

- $x \equiv 5 \bmod 3$
- $x \equiv 5 \bmod 2$

$\Leftrightarrow x \equiv 5 \bmod 6$
x: περιττός

- $x \equiv 11 \bmod 17$

- $x \equiv 8 \bmod 5$
- $x \equiv 8 \bmod 2$

$\Leftrightarrow x \equiv 8 \bmod 10$
x: άρτιος

Από τρεις ισοτιμίες πάω σε πέντε

$x \equiv 1 \bmod 2$
$x \equiv 0 \bmod 2$
Άρα δεν έχει λύση το σύστημα.